CHAPITRE 5 : FONCTIONS LOGARITHMES

I. RESUME DE COURS

1. Définition et résultats de base

1) On appelle logarithme népérien, noté ln, la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ s'annulant pour $x = 1$.

On en déduit alors que pour tout réel strictement positif x, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$.

2) $\ln(1) = 0$

3) $\ln e = 1$; $e \simeq 2,718...$

4) Le signe de la fonction ln :

$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$	**Le signe de $\ln x$ est le même que celui de $x-1$ pour tout $x > 0$**

5) Pour tous réels a et b de $]0;+\infty[$,on a :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$$
$$\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b .$$

6) Equation : $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$

2. Propriétés algébriques

Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout entier relatif p :

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ $\quad \ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$ $\quad \ln(\frac{1}{b}) = -\ln b$

$\ln(a^p) = p\ln a$ $\quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$ $\quad \ln\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right| = \sum_{i=1}^{n}\ln|a_i|, \quad a_i \neq 0$

3. Limites usuelles

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0^+$,(pour $n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0^-$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0^-$,(pour $n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

4. Dérivée – primitive

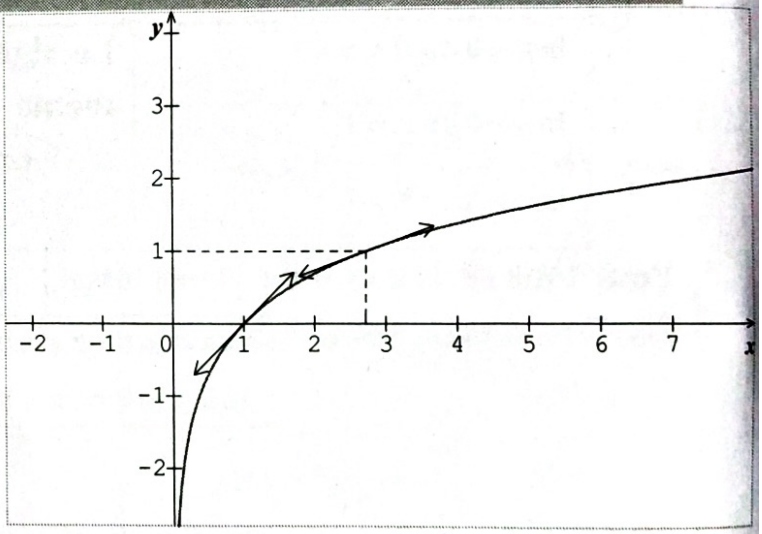
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f(x) = \ln|u(x)| \Rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur un intervalle I est $\ln|u|$.

5. Courbe

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$

x	0		1		$+\infty$
ln'	||		+		
ln	|| $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



Asymptote verticale	$x = 0$
Branche parabolique	Direction (Ox)
Tangente en (1,0)	$y = x - 1$
Tangente en (e,1)	$y = \dfrac{1}{e}x$

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Choisir la bonne réponse :

1	Soit $A = 2\ln 5 + 2\ln(e^{-5}) + \ln\frac{1}{25}$. Alors la valeur de A est	
	Réponse A	0
	Réponse B	$10 + 4\ln 5$
	Réponse C	-10
	Réponse D	$-10 + 4\ln 5$

2	Le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(x^2 - 1)$ est	
	Réponse A	$]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$
	Réponse B	$]1;+\infty[$
	Réponse C	$]0;+\infty[$
	Réponse D	$]-1;1[$

3	L'équation $(x^2 - 9)\ln(x+2) = 0$	
	Réponse A	admet une unique solution -1
	Réponse B	admet deux solutions
	Réponse C	admet trois solutions
	Réponse D	n'admet pas de solution

4	La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est	
	Réponse A	$x \mapsto -\tan x$
	Réponse B	$x \mapsto \tan x$
	Réponse C	$x \mapsto -\cot x$
	Réponse D	$x \mapsto \cot x$

5	Une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$ est	
	Réponse A	$x \mapsto x(-1+\ln x)$
	Réponse B	$x \mapsto \frac{1}{x}$
	Réponse C	$x \mapsto x + x\ln x$
	Réponse D	$x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$

6	Soit $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$. On a	
	Réponse A	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
	Réponse B	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
	Réponse C	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$
	Réponse D	$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0^+$

QCM 2

Choisir la bonne réponse :

1	Soit $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$. Alors :	
	Réponse A	$I=1$
	Réponse B	$I=\frac{1}{e}$
	Réponse C	$I=\frac{e}{2}$
	Réponse D	$I=\frac{1}{2}$

2	La dérivée de la fonction $f(x)=\sqrt{\ln x}$	
	Réponse A	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$
	Réponse B	$f'(x)=\frac{x}{2\sqrt{\ln x}}$
	Réponse C	$f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$
	Réponse D	$f'(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

3	Pour tout entier naturel n on pose $U_n=\int_1^e (\ln t)^n dt$. Alors la suite (U_n) est :	
	Réponse A	Croissante
	Réponse B	Décroissante
	Réponse C	non monotone
	Réponse D	Divergente

4	La valeur de l'intégrale $I=\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+5}dx$ est :	
	Réponse A	$\ln(\frac{15}{7})$
	Réponse B	$\ln(\frac{5}{3})$
	Réponse C	$\frac{7}{9}$
	Réponse D	$\ln(\frac{9}{15})$

5	On pose $A=\int_0^2 \frac{t^2}{1+t^3}dt$. Alors on a :	
	Réponse A	$A=\ln 3$
	Réponse B	$A=\frac{1}{2}\ln 3$
	Réponse C	$A=\frac{2}{3}\ln 3$
	Réponse D	$A=\frac{1}{3}\ln 3$

6	Soit $f(x)=\ln(x+1)$ avec $x\in]-1,+\infty[$. On a :	
	Réponse A	$f^{-1}(x)=e^{x-1}$
	Réponse B	$f^{-1}(x)=e^x-1$
	Réponse C	$f^{-1}(x)=e^{x+1}$
	Réponse D	$f^{-1}(x)=e^x+1$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(x-3) = \ln(5-x)$

2) $\ln(x-3) + \ln(x+3) = 2\ln 4$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$

2) $\ln(2x^2-3x-5) \leq 2\ln 2$

Exercice 3

Soit $f(x) = (x-2)^2 \ln(x^3-8)$.

Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.

Exercice 4

Soit $f(x) = \dfrac{3\ln^2 x - 4\ln x + 1}{x-e}$.

Calculer . $\lim\limits_{x \to e} f(x)$

Exercice 5

On se propose de calculer l'intégrale $I=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$

1) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x>-1$,

$$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}.$$

2) Calculer $J=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1.a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déduire que pour tout entier n ≥ 6, l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n

c) Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge.

Exercice 7

La fonction numérique *f* est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-2+\frac{3\ln x}{x}$

1) Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes dont on donnera des équations.

2) Trouver une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x$.

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$; on a $f(x) > 0$.

4) A l'aide d'une utiliser une intégration par parties, calculer l'aire A du domaine plan délimité par la courbe C_f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. Donner une valeur approchée de A à 10^{-3} près.

5.a) Etudier les asymptotes et les branches infinies de C_f.

b) Donner une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.

c) Tracer T et C_f.

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{1+\ln x}{x}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C).

c) Etudier la position relative de (C) et Δ.

2. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x$.

a) Vérifier que $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1 + \ln 2}{2}$.

b) Calculer $g'(x)$.

c) Etudier les variations de g et montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$, $g(x) > 0$.

3.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4.a) Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α □. Vérifier que $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.

5.a) Préciser les points de la courbe (C) en lesquels la tangente (T) est parallèle à Δ.

b) Représenter la courbe (C) et les droites Δ et (T) dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $(m+1)x-1-\ln x=0$.

6) Soit n un entier naturel, $n \geq 1$. On note U_n l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'asymptote oblique Δ et les droites d'équation respectives $x=n$ et $x=n+1$.

a) Exprimer U_n en fonction de n .

b) Calculer et interpréter graphiquement $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)-\frac{x^2+3}{x^2+1}$.

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f et étudier sa parité.

2) Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement.

3) Justifier la dérivabilité de f sur D_f et montrer que pour tout *x* de $]0;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x^2+1)^2}$$

4) Dresser le tableau de variation de f.

5.a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution α et vérifier que $0,2<\alpha<0,3$.

b) Que peut-on déduire pour l'intervalle $]-\infty;0[$?

c) Déduire des questions précédentes le signe de *f*(*x*) sur D_f

6) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

1) L'équation $\ln(x-3) = \ln(5-x)$

Conditions d'existence : $x-3>0$ et $5-x>0$.

C'est-à-dire : $x>3$ et $x<5$. D'où le domaine de définition de l'équation est $D =]3 ; 5[$.

Résolution de l'équation : Pour tout $x \in D, \ln(x-3) = \ln(5-x)$ équivaut à $x-3=5-x$ c'est-à-dire $2x=8$ soit $x=4$.

Validation des solutions: Cette solution nombre appartient bien à D. Donc l'ensemble des solutions est $S=\{4\}$.

2) L'équation $\ln(x-3)+\ln(x+3)=\ln 7$

Conditions d'existence : L'ensemble de définition D de l'équation est l'ensemble des réels x tels que $\begin{cases} x-3>0 \\ x+3>0 \end{cases}$ soit $D =]3;+\infty[$.

Résolution de l'équation : Pour tout $x \in]3;+\infty[$ on a :

$$\ln(x-3)+\ln(x+3)=2\ln 4 \Leftrightarrow \ln\big((x-3)(x+3)\big)=\ln 16$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3)=16$$

$$\Leftrightarrow x^2-9=16$$

$$\Leftrightarrow x^2=25$$

$$\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=-5$$

Validation des solutions: La solution $x=-5$ est rejetée car $-5 \notin D$. Alors l'ensemble de solutions est $S=\{5\}$.

Corrigé 2

1) L'inéquation $\ln(2x-5)+ \ln(x+1) \leq 2\ln 2$

Conditions d'existence : L'ensemble de définition D de l'inéquation est l'ensemble des réels x tels que $\begin{cases} 2x-5>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ soit $D = \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$.

Résolution de l'inéquation : Pour tout $x \in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ on a :

$$\ln(2x-5)+\ln(x+1) = \ln\left((2x-5)(x+1)\right)$$
$$= \ln(2x^2-3x-5)$$

L'inéquation s'écrit donc $\ln(2x^2-3x-5) \leq \ln 4$

La fonction ln étant strictement croissante, donc l'inéquation équivaut à $2x^2-3x-5 \leq 4$ Soit $2x^2-3x-9 \leq 0$.

Le trinôme $2x^2-3x-9$ admet dans $\mathbb{R}$ deux racines : $-\frac{2}{3}$ et 3 et il est négatif lorsque x est compris entre ces racines. C'est-à-dire $-\frac{2}{3} \leq x \leq 3$.

Validation des solutions: Comme l'ensemble de définition de l'inéquation est $D = \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$, et $-\frac{2}{3} \leq x \leq 3$; on déduit que l'ensemble de solutions est l'ensemble des réels x tels que $\frac{5}{2} < x \leq 3$ soit $S = \left]\frac{5}{2};3\right]$.

2) L'inéquation $\ln(2x^2-3x-5) \leq 2\ln 2$

Conditions d'existence : L'ensemble de définition D de l'inéquation est l'ensemble des réels x tels que $2x^2-3x-5>0$.

Le trinôme $2x^2-3x-5$ admet deux racines : -1 et $\frac{5}{2}$ et il est positif lorsque x est extérieur à l'intervalle de ces racines. C'est-à-dire que l'ensemble de définition D de l'inéquation est $D=]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{2};+\infty[$.

Résolution de l'inéquation : Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{2};+\infty[$, l'inéquation équivaut à $2x^2-3x-5\leq 4$ car la fonction ln est strictement croissante.

Soit $2x^2-3x-9\leq 0$.

Le trinôme $2x^2-3x-9$ admet dans $\mathbb{R}$ deux racines : $-\frac{2}{3}$ et 3 et il est négatif lorsque x est compris entre ces racines. C'est-à-dire $x\in\left[-\frac{2}{3};3\right]$.

Validation des solutions: En tenant compte de l'ensemble de définition de l'inéquation, on déduit que l'ensemble de solutions S de l'inéquation est l'ensemble des réels x tels que

$$\begin{cases} x\in]-\infty;-1[\cup]\frac{5}{2};+\infty[\\ x\in\left[-\frac{2}{3};3\right] \end{cases}$$

Par suite $S=\left[-\frac{3}{2};-1\right[\cup\left]\frac{5}{2};3\right]$.

Corrigé 3

$f(x) = (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$

Une forme d'indétermination se présente lorsque $x \to 2^+$. Pour lever cette indétermination on modifie l'écriture de $f(x)$ pour faire apparaître des limites usuelles.

$f(x) = (x-2)(x-2)\ln(x-2)(x^2+2x+4)$

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(x^2+2x+4)} \times (x-2)(x^2+2x+4)\ln(x-2)(x^2+2x+4)$$

D'une part on a : $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)}{(x^2+2x+4)} = 0^+$.

D'autre part, en posant $t = (x-2)(x^2+2x+4)$ on a $(x \to 2^+) \Leftrightarrow (t \to 0^+)$.

Donc $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)(x^2+2x+4)\ln(x-2)(x^2+2x+4) = \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t = 0^-$

Par suite $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)}{(x^2+2x+4)} \times \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t$. Enfin : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0^-$.

Corrigé 4

$$f(x) = \frac{3\ln^2 x - 4\ln x + 1}{x-e}$$

Pour lever l'indétermination lorsque $x \to e$, on peut appliquer un taux d'accroissement :

On pose $u(x) = 3\ln^2 x - 4\ln x + 1$. Donc $u(e) = 3\ln^2 e - 4\ln e + 1 = 0$ et par conséquent, $f(x) = \dfrac{u(x)-u(e)}{x-e}$. Donc $\lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e} \dfrac{u(x)-u(e)}{x-e}$

La fonction u est dérivable en $x_0 = e$ et de dérivée $u'(x) = \frac{6}{x}\ln x - \frac{4}{x}$.

$$\lim_{x \to e} \frac{u(x) - u(e)}{x - e} = u'(e) \Leftrightarrow \lim_{x \to e} f(x) = u'(e).$$

On a : $u'(e) = \frac{6}{e}\ln e - \frac{4}{e} = \frac{2}{e}$. Par suite $\lim_{x \to e} f(x) = -\frac{1}{e}$

Corrigé 5

1) On peut écrire pour tout $x > -1$: $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1}$

$$\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Donc $a = 1, b = -1$ et $c = 1$

2) On a alors $J = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx \Leftrightarrow J = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$J = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right]_0^1$$

$$J = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

3) Pour calculer $I = \int_0^1 x\ln(1+x)dx$ en utilisant une intégration par parties on pose :

$$\begin{cases} u'(x) = x \\ v(x) = \ln(1+x) \end{cases} \; ; \text{ Alors } \begin{cases} u(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ v'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$$

Donc $\int_0^1 x\ln(1+x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{1+x}dx$

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}J$$

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$$

$$I = \frac{1}{4}.$$

Corrigé 6

f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1.a) Tableau de variation de f.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x}\right) = 0^+ \quad \text{car} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

- **f est dérivable sur $]0;+\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.**

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times \ln x}{\left(x^2\right)^2}$$

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

Or $x^3 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur :

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$$

On a $f(\sqrt{e}) = \dfrac{\ln(\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^2} = \dfrac{1}{2e}$.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

b) Montrons que pour tout entier n ≥ 6, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1, \sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n :

- **La restriction de f sur l'intervalle $I = \left[1, \sqrt{e}\right]$ est continue et strictement croissante et $f(I) = J = \left[0, \frac{1}{2e}\right]$.**

- **De plus $\forall n \geq 6,\ 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{2e}$; $((\frac{1}{6} \simeq 0{,}167 < \frac{1}{2e} \simeq 0{,}184)$. Alors $\forall n \geq 6, \frac{1}{n} \in J = \left[0, \frac{1}{2e}\right]$.**

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n

c- Montrons que la suite (a_n) est décroissante, et qu'elle converge :

On a $\forall n \geq 6,\ \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$. Or $\forall n \geq 6,\ \frac{1}{n} = f(a_n)$ et $\frac{1}{n+1} = f(a_{n+1})$ donc

$f(a_n) > f(a_{n+1})$ et comme f est strictement croissante sur $\left[1,\sqrt{e}\right]$ alors

$a_n > a_{n+1}$ et la suite (a_n) est strictement décroissante.

D'autre part $a_n \in \left[1,\sqrt{e}\right]$ donc la suite (a_n) est décroissante et minorée par 1, d'où elle converge.

Corrigé 7

1) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x-2)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x} = 0$. On Alors la droite d'équation $y = 2x - 2$ droite est une asymptote oblique à C_f .

D'autre part on a $\lim\limits_{x\to0^+}(2x-2) = -2$ et $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{3}{x} = +\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+}\frac{3\ln x}{x} = -\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à C_f .

2) Une primitive de la fonction $x \mapsto 2x-2$ sur $]0;+\infty[$ est $x \mapsto x^2 - 2x$,

La fonction $x \mapsto \frac{3\ln x}{x}$ s'écrit sous la forme $x \mapsto 3 \times \frac{1}{x} \times \ln x$

On en déduit que la fonction $x \mapsto 3 \times \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $x \mapsto \frac{3\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

Conclusion : La fonction $x \mapsto x^2 - 2x + \frac{3}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Corrigé 8

1) Calcul de limites

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(2x\sqrt{x}) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(-3\ln x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

Pour lever l'indétermination en $+\infty$ on factorise par x :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x})\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(2\sqrt{x}) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-3\frac{\ln x}{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2) Calculons la dérivée :

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{4x + 2x}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x}$$

$$f'(x) = \frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x} \text{ soit } f'(x) = 3\frac{x^2 - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur car $x \in]0;+\infty[$.

On a alors $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{x} \geq 0$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x}$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 \geq x$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - x \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

On a $f(1) = 2$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

3) La fonction f présente un minimum absolu en 1 qui vaut $f(1)=2$ supérieur à zéro. Donc pour tout $x\in]0;+\infty[$; on a $f(x)>0$.

4) La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[1;e]$. Donc l'aire cherchée est calculée par l'intégrale $A=\int_1^e f(x)dx$.

Donc $A=\int_1^e (2x\sqrt{x}-3\ln x)dx$.

$$A=2\int_1^e x\sqrt{x}dx-3\int_1^e \ln xdx$$

$$A=2\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx-3\int_1^e \ln xdx$$

La première intégrale est calculée directement par les formules des primitives usuelles :

$$2\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx=2\left[\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right]_1^e$$

$$2\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx=\left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^e$$

$$2\int_1^e x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{5}(e^{\frac{5}{2}}-1)$$

La deuxième intégrale $3\int_1^e \ln xdx$ est calculée en utilisant une intégration par parties :

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$, ce qui donne $\begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$.

Par suite $3\int_1^e \ln x dx = 3\left([x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx \right)$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3\left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right)$$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3\left([x \ln x]_1^e - [x]_1^e \right)$$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3[x \ln x - x]_1^e$$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3[e \ln e - e - 1 \ln 1 + 1]_1^e$$

$$3\int_1^e \ln x dx = 3$$

Il vient $A = \frac{4}{5}(e^{\frac{5}{2}} - 1) - 3$

$$A = \frac{4}{5}e^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{5} - 3$$

$$A = \frac{4}{5}e^{\frac{5}{2}} - \frac{19}{5}$$

Soit $A = \dfrac{4e^{\frac{5}{2}} - 19}{5}$

Enfin $A \simeq 5,946$ ua

5.a) On a trouvé $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Donc admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

En plus $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Calculons $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(2\sqrt{x} - 3\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2\times \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} - 3\times \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

On sait que $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Par suite $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

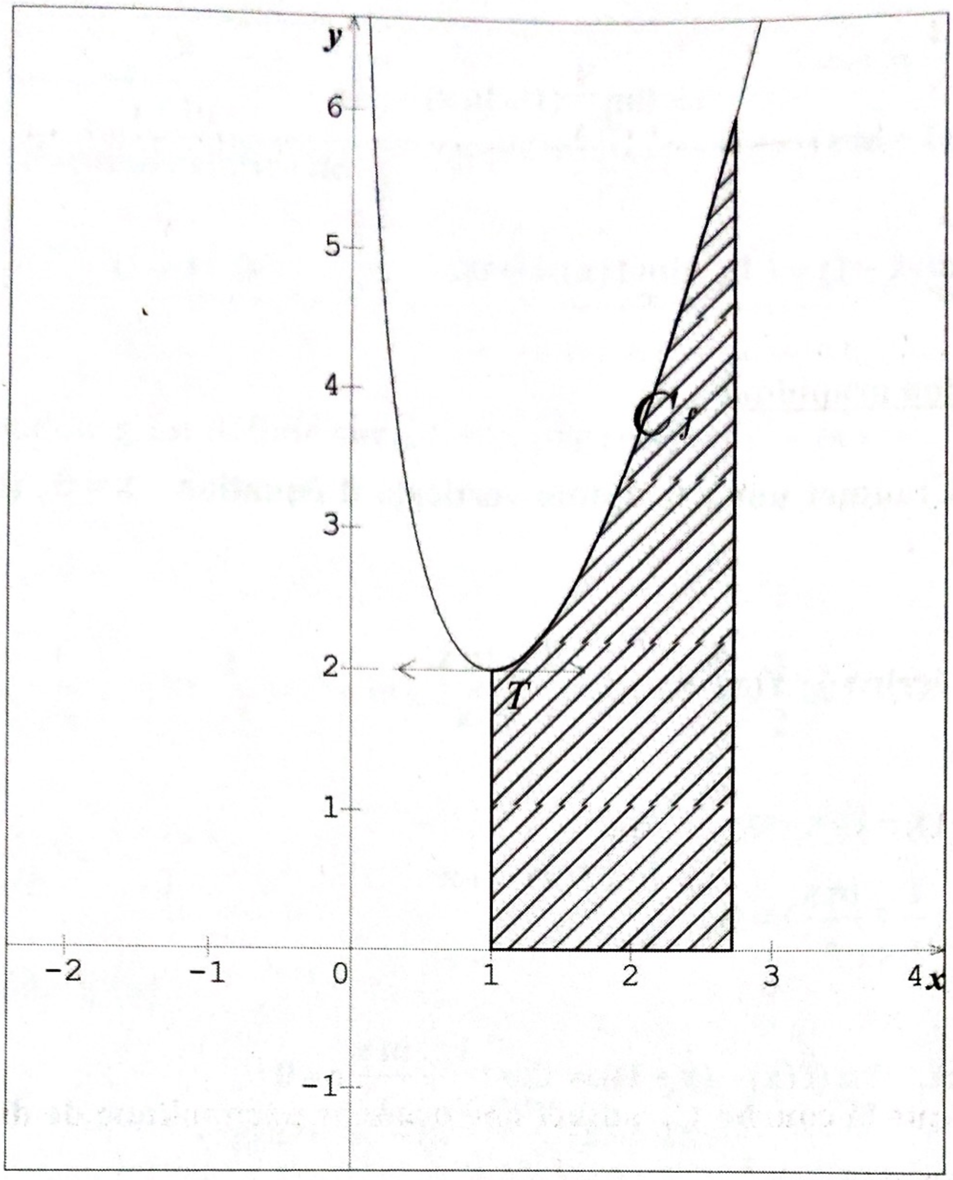
On en déduit que la courbe C_f admet une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $+\infty$.

b) Une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Soit $y = 2$ car $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$;

(Une tangente horizontale).

c) Courbe de f :



Corrigé 9

La fonction f est définie sur]0;+∞[par : $f(x)=x-1+\dfrac{1+\ln x}{x}$.

(C) sa courbe représentative dans un repère orthonomal direct d'unité graphique 1cm.

1.a) Limite et interprétation :

*** On peut écrire :** $f(x)=x-1+\dfrac{1}{x}(1+\ln x)$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (1 + \ln x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}(1 + \ln x) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

Interprétation graphique :

la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$, (l'axe des ordonnées).

b) On peut écrire : $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}$

On a $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x}) = 0$

Alors la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe (C).

c) Pour étudier la position relative de (C) et Δ, on étudie le signe de $d(x) = f(x) - (x - 1)$

$d(x) = \dfrac{1 + \ln x}{x}$

Le signe de $d(x)$ alors est celui de $1 + \ln x$, car x est de l'intervalle $]0;+\infty[$.

On a $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

La droite Δ coupe (C) au point de coordonnées $(e^{-1}, e^{-1} - 1)$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$1+\ln x$	||	-	0	+	
Position relative de (C) et Δ	||	$\Delta/(C)$		$(C)/\Delta$	

2) La fonction g est définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-\ln x$.

a) On a :

$$g(\frac{1}{\sqrt{2}})=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}+\ln(2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2$$

Donc $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1+\ln 2}{2}$

b) Calcul de $g'(x)$:

$$g(x)=x^2-\ln x\Rightarrow g'(x)=2x-\frac{1}{x}$$

$$g'(x)=\frac{2x^2-1}{x}$$

c) On constate que le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2-1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

On a pour tout x de $]0,+\infty[$: $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

D'après 2.a) on a : $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1+\ln 2}{2}$.

Dressons une partie du tableau de variation de g :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$\frac{1+\ln 2}{2}$	↗	

La fonction g présente un minimum absolu $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1+\ln 2}{2}$ sur $]0;+\infty[$.

Comme $\frac{1+\ln 2}{2} \approx 0,85 > 0$, $g(x) > 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

3.a) On a $f(x) = x - 1 + \frac{1+\ln x}{x}$

Donc $f'(x) = 1 + \frac{1-(1+\ln x)}{x^2}$

Soit $f'(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x^2}$

On a alors pour tout x de $]0,+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Tableau de variation de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

Donc pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)>0$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	
$f(x)$	||	$-\infty$ ↗	$+\infty$

4.a) D'après l'étude de f et son tableau de variations on a :

- f est continue sur $]0;+\infty[$;
- f est strictement croissante (monotone) sur $]0;+\infty[$;
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Donc $f :]0;+\infty[\longrightarrow J=]-\infty;+\infty[$ réalise une bijection.

b) La fonction f est continue et bijective sur son domaine de définition avec $0\in J=]-\infty;+\infty[$. Alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

De plus, on a :

$$\begin{cases} f(\frac{1}{e})\approx -0,63<0 \\ f(\frac{1}{2})\approx +0,11>0 \end{cases};$$

Donc α vérifie $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$.

5.a) Pour préciser les points de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à l'asymptote Δ d'équation $y = x - 1$, on résout l'équation $f'(x) = 1$

Donc : $$\frac{x^2 - \ln x}{x^2} = 1$$

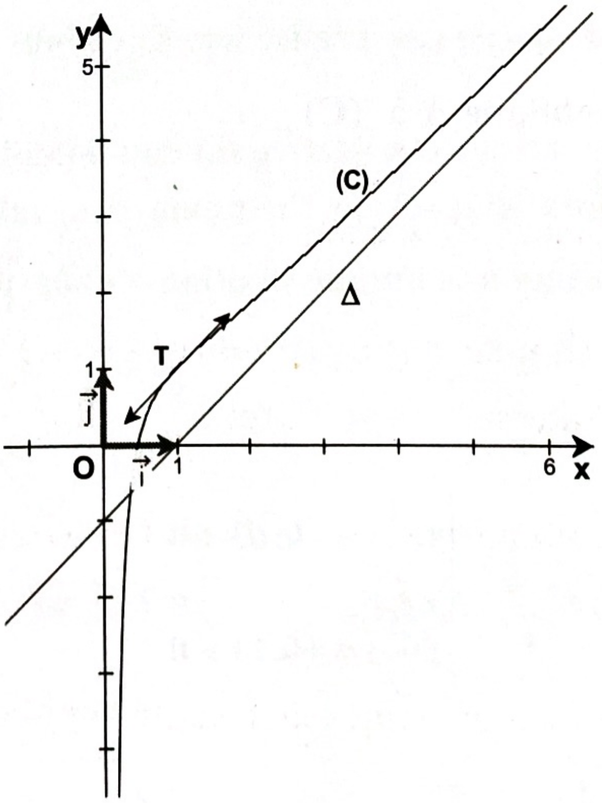
$$x^2 - \ln x = x^2$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

Alors la tangente (T) à la courbe (C) au point $(1,1)$ est parallèle à la droite Δ . Une équation de cette tangente est : $y = x$

b) Représentation de la courbe (C)



c) L’équation $(m+1)x-1-\ln x=0$ s’écrit $mx+x-1-\ln x=0$ donc

$$m=-1+\frac{1+\ln x}{x}$$

$$x+m=x-1+\frac{1+\ln x}{x}$$

$$x+m=f(x)$$

$$\begin{cases} y=x+m \\ y=f(x) \end{cases}$$

Les solutions du système sont les coordonnées des points d’intersection de la courbe (C) et les droites Δ_m d’équation $y=x+m$ parallèles à l’asymptotes oblique de (C) et à la tangente (T), où m est un paramètre réel.

A noter que :

Δ_{-1} est l’asymptotes oblique Δ à (C)

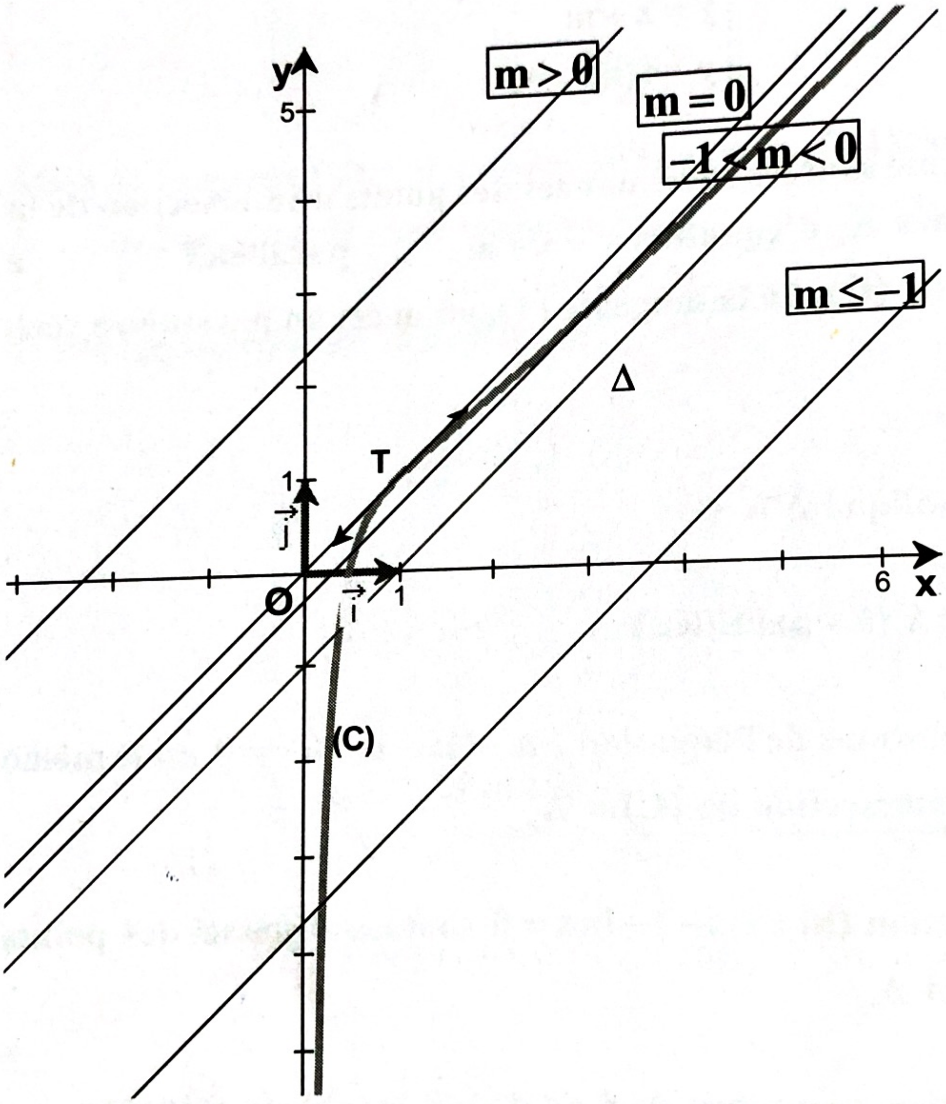
Δ_0 est la tangente (T) à (C) parallèle à Δ

Alors, le nombre de solutions de l’équation $(m+1)x-1-\ln x=0$ est le même nombre de points d’intersection de (C) et Δ_m

Les solutions de l’équation $(m+1)x-1-\ln x=0$ sont les abscisses des points d’intersection de (C) et Δ_m

D’après la représentation graphique de f, on déduit le tableau suivant :

valeurs du paramètre m	nombre d'intersection de (C) et Δ_m	nombre de solutions
$m \leq -1$	1	1
$-1 < m < 0$	2	2
$m = 0$	1 (tangente)	1
$m > 0$	0	0



6.a) La fonction f est continue sur tout intervalle de type $[n, n+1]$ où n est un entier naturel, $n \geq 1$.

La courbe (C), est située en dessus de l'asymptote oblique Δ sur l'intervalle $[n,n+1]$.

Alors l'aire U_n du domaine plan délimité par la courbe (C), l'asymptote oblique Δ et les droites d'équation respectives $x=n$ et $x=n+1$ est calculée par :

$$U_n = \int_n^{n+1} (f(x)-(x-1))dx \times ua$$

Alors :

$$U_n = \int_n^{n+1} \frac{1+\ln x}{x} dx \times ua$$

$$U_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}(1+\ln x)dx \times ua$$

$$U_n = \left[\frac{1}{2}(1+\ln x)^2\right]_n^{n+1} ua$$

$$U_n = \frac{1}{2}(1+\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(1+\ln(n))^2 ua$$

$$U_n = \frac{1}{2}\left((1+\ln(n+1))^2 - (1+\ln(n))^2\right)ua$$

$$U_n = \frac{1}{2}\left((\ln(n+1)-\ln n)(2+\ln(n+1)+\ln n\right)ua$$

$$U_n = \frac{1}{2}\left((\ln(\frac{n+1}{n}))(2+\ln(n^2+n)\right)$$

$$U_n = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\frac{1}{n})\right)\left((2+\ln(n^2+n)\right)$$

b) Pour calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$, on procède à une transformation d'écriture pour lever l'indétermination :

$$U_n = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\frac{1}{n})\right)\left((2+\ln(n^2+n)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{(2+\ln(n^2+n)}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{2}{n}+\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(n+1)}{n}\right)$$

On a :

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \\ \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{n}+\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln(n+1)}{n}\right) = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

Interprétation graphique :

Lorsque n tend vers plus l'infini, l'asymptote oblique Δ□ coïncide avec la courbe (C). Donc il n y a plus d'espace entre les frontières verticale du domaine d'aire U_n , d'où U_n tend vers zéro .

Corrigé 10

1) Domaine de définition

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \neq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x^2} > 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$$

Alors $D_f = \mathbb{R}^*$

Parité :

On a $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ car $D_f = \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = \ln\left(\dfrac{(-x)^2+1}{(-x)^2}\right) - \dfrac{(-x)^2+3}{(-x)^2+1}$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) - \frac{x^2+3}{x^2+1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire.

2) Calcul de limites

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3}{x^2+1} = 3$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3}{x^2+1} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -1$

Interprétation graphique :

La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équaion $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équaion $y = -1$.

3) La fonction $x \mapsto -\dfrac{x^2+3}{x^2+1}$ est rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition $D_f = \mathbb{R}^*$.

Il en est de même pour la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x^2}$. Cette dernière est strictement positive sur D_f, donc la fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$ est dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables.

Enfin la fonction f est dérivable sur D_f comme somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2x \times x^2 - 2x(x^2+1)}{x^4}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} - \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+3)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{-2x}{x^4}}{\dfrac{x^2+1}{x^2}} + \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2\left(x^2+1\right) + 4x^2}{x\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x^2+1)^2}.$$

4) Le signe de $f'(x)$ est celui de $\frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		-		-		-	0	+	
$x+1$		-	0	+		+		+	
x		-		-	0	+		+	
$f'(x)$		-		+	‖	-		+	

Comme f est une fonction paire, on a $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$

On déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	‖	-	0	+	
$f(x)$	-1	↘	$-2+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-2+\ln 2$	↗	-1

4.a) Sur l'intervalle $]0;1]$; la fonction f est continue et change de signe une seule fois. Alors l'équation $f(x)=0$ admet dans cet intervalle une unique solution. Sur l'intervalle $[1;+\infty[$, f est strictement négative. On conclut que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution α.

On a $f(0,2) \simeq +0,34$ et $f(0,3) \simeq -0,34$ donc $f(0,2)\times f(0,3) < 0$. Ce qui démontre que $0,2 < \alpha < 0,3$, (D'après le théorème des valeurs intermédiaires).

b)Comme la fonction f est paire, on déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]-\infty;0[$ une unique solution $\beta = -\alpha$. Par conséquence $-0,3 < \beta < -0,2$.

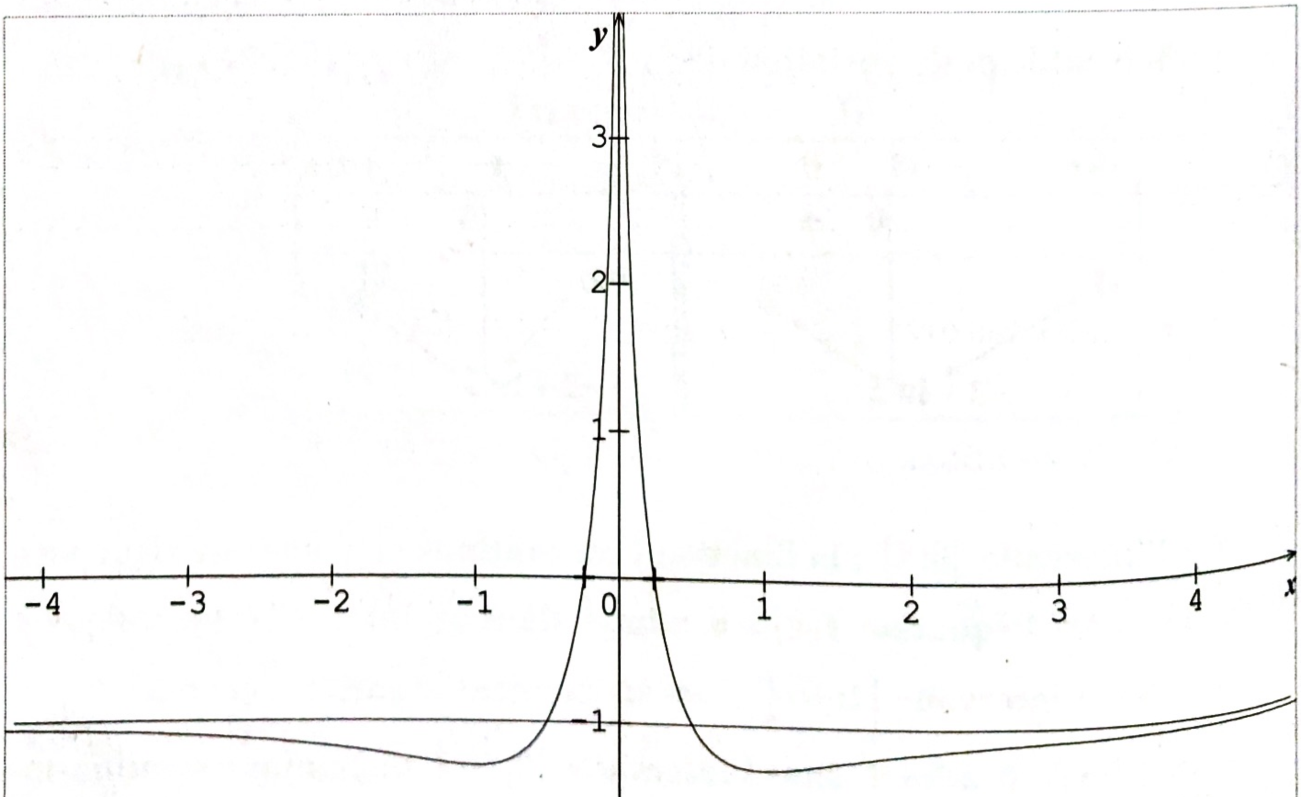
c) On en déduit le signe de f(x) :

Pour $x \in]-\infty;-\alpha[\cup]\alpha;+\infty[$ on a $f(x) < 0$.

Pour $x \in]-\alpha,0[\cup]0;\alpha[$ on a $f(x) > 0$

Et $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\alpha$.

6) Courbe de f :



V. EXERCICES DE SYNTHESE

Exercice 1

1. Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels *a*, *b* et *c* tels que l'on ait, pour tout $x>1$:
$g(x)=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.
Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer avec une intégration par parties: $I=\int_2^3 \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x\,dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2+q\ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice 2

Pour tout entier naturel $p\geq 1$, on pose $I_p=\int_1^e x^2(\ln x)^p\,dx$.

1) Calculer I_1 en utilisant une intégration par parties.

2) Montrer que: $\forall p\geq 1,\quad I_{p+1}=\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{p+1}{3}I_p$. En déduire I_2, I_3

3) Montrer que la suite (I_p) est décroissante et convergente, (On ne demande pas de calculer la limite.)

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-3-\frac{\ln x}{x}$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1. Démontrer chacun des résultats suivants et en donner des interprétations géométriques.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(f(x)-(x-3)\right)=0$.

2.a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a : $f'(x)=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$.

b) Vérifier que : $\begin{cases} \forall x\geq 1; & f'(x)\geq 0 \\ \forall x\leq 1; & f'(x)\leq 0 \end{cases}$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

3.a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ exactement deux solutions α et β. Vérifier que : $0,37<\alpha<0,38$ et $3,36<\beta<3,37$.

b) Déterminer les points de (C) en lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y=x$ et donner les équations des tangentes en ces points.

c) Construire la courbe (C).

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\ln x=mx$ où m est un paramètre réel.

Exercice 4

On considère la fonction numérique f définie sur $D =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 + x).$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité 2cm .

1.a) Calculer les limites suivantes: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis les interpréter géométriquement.

b) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement.

2.a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f et étudier son signe sur D.

b) Dresser le tableau de variations de f .

3. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe (C).

4. Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses puis construire (C).

5.a) En utilisant une intégration par parties, calculer les deux nombres: $I = \int_1^e \ln x dx$ et $J = \int_1^e \ln(x+1)dx$.

b) Calculer l'aire, en cm^2, de la surface plane délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respective $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 5

On considère la fonction numérique g définie sur $]-1;+\infty[$ par :
$g(x) = 2x + \ln(x+1)$.

1.a) Calculer les limites suivantes: $\lim_{x \to -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} (g(x) - 2x)$. Interpréter graphiquement.

2. Calculer $g'(x)$ où g' est la fonction dérivée de g. Dresser le tableau de variation de g.

3.a) Calculer $g(0)$, en déduire le signe de $g(x)$.

b) Tracer la courbe représentative de g dans un repère orthonormé.

4. Pour tout $x > -1$; on pose $u(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

a) Calculer $u'(x)$ et montrer que pour tout $x > -1$ on a $g(x) = u'(x) + 2x - 1$.

b) En déduire la primitive G de la fonction g sur $]-1;+\infty[$ qui vérifie $G(0) = -1$.

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 6

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :
$g(x) = x^3 - 3 + 2\ln x$

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ **et dresser le tableau de variation de g.**

2. a) Montrer que g **réalise une bijection de** $]0;+\infty[$ **sur un intervalle** J **que l'on déterminera.**

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ **admet une unique solution** α. **Vérifier que** $1{,}3 \le \alpha \le 1{,}4$

c) En déduire le signe de la fonction *g* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ **par :**

$$f(x)=x-2+\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

On note Γ **la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan, muni d'un repère** $(O;\vec{i},\vec{j})$ **orthonormé.**

1.a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ **et** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(x-2)\right)=0$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

c) Étudier le signe de $d(x)=f(x)-(x-2)$ **, résumer dans un tableau et interpréter graphiquement.**

2.a) Calculer $f'(x)$ **et justifier que** $f'(x)$ **a même signe que** $g(x)$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha^3-4\alpha^2-1}{2\alpha^2}$ **et donner une valeur approchée de** $f(\alpha)$ **à** 10^{-1} **près.**

c) En déduire le tableau de variation de la fonction *f*.

3.a) Donner l'équation de la tangente T à Γ au point A d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Montrer que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un deuxième point autre que A d'abscisse β telle que $1,9 \leq \beta \leq 2$

c) Tracer l'allure de la courbe Γ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit n un entier naturel $n \geq 3$. On considère l'aire du domaine E du plan compris entre la courbe Γ et les droites d'équations respectives $y = x - 2$, $x = 3$ et $x = n$.

a) Justifier que cette aire, exprimée en cm², est donnée par :

$$I_n = \int_3^n \frac{-1+\ln x}{x^2}\,dx.$$

b) Calculer $J_n = \int_3^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire I_n en fonction de n .

c) Calculer la limite de l'aire I_n du domaine E quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $I =]-1;+\infty[$ par:

$$g(x) = (x+1)^2 - 1 + \ln(x+1).$$

1) Calculer $g'(x)$; en déduire le sens de variation de g .

2) Calculer g(0); en déduire le signe de g(x) sur I. (la représentation de g n'est pas demandée).

Partie B

On considère la fonction numérique f définie sur $I =]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}.$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1. a) Calculer $\lim_{x \to -1^+} f(x)$; puis interpréter graphiquement ce résultat.

b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

2. a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$; en déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) dont-on donnera une équation.

b) Démontrer que (C) rencontre (D) en un seul point A dont-on précisera les coordonnées puis étudier la position relative de (C) et (D).

3. a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que pour tout x de I on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

4. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point B d'abscisse $x_0 = e - 1$.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que : $-0,6 < \alpha < -0,5$ et $1,3 < \beta < 1,4$.

On donne : $\ln(0,4) \approx -0,9$; $\ln(0,5) \approx -0,7$; $\ln(2,3) \approx 0,8$ et $\ln(2,4) \approx 0,9$.

5. Construire, dans repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les deux asymptotes; la tangente (T) et la courbe (C).

6. Soit m un paramètre réel strictement positif.

a) Calculer, en cm^2, l'aire A(m) du domaine plan limité par la courbe (C); l'asymptote (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=m$.

b) Pour quelle valeur de m a-t-on $A(m)=2cm^2$? Hachurer cette aire sur la figure.

7. On désigne par h la restriction de f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[-1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de h^{-1} (où h^{-1} est la bijection réciproque de h).

c) Tracer la droite d'équation $y=x$ et la courbe (C') représentative de h^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=2x\ln x-x-1;\ x>0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$

(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité de f à droite de 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 .interpréter graphiquement.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x>0$.

b) Montrer que la courbe (C) de f admet au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$ une tangente horizontale.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3)a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α et que $2<\alpha<2.1$.

b) Tracer la courbe (C).

4) On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 lnx$.

a) Vérifier que pour tout $x > 0$, g'(x)= f(x) +2x+1.

b) En déduire la primitive F de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ telle que F(1)=0.

5) Pour tout $n \geq 1$. On pose : $U_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)dx$.

a) Interpréter U_n graphiquement.

b) Démontrer que la suite (U_n) est croissante.

c) Exprimer U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 3x - 3 - 2x\ln x,\ x > 0 \\ f(0) = -3 \end{cases}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1cm.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire que f est continue à droite de $x_0 = 0$.

b) Montrer queet interpréter graphiquement. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$

c) Montrer que. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2.a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$ et vérifier que $f'(\sqrt{e}) = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse $x_0 = 1$

b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses (Ox) en un point B autre que A dont l'abscisse α est telle que : $2.3 \leq \alpha \leq 2.4$.

c) Déduire de ce qui précède le signe de f(x) sur $[0;+\infty[$.

4) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2\ln x\ ;\ x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = 3x - 3 + g'(x)$.

b) En déduire une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

5) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose: $U_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$.

a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b) Exprimer U_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 10 (Traduit)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}$.	نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{x+1}$
Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonomal direct d'unité graphique 5cm	وليكن (C) منحنيها البياني في مرجع قائم ومنتظم $(O;\vec{u},\vec{v})$ وحدته 5cm
1. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ puis interpréter graphiquement ces résultats	1) أثبت أن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ؛ وأن $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ ثم فسر النتائج بيانيا.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f .	2) احسب $f'(x)$ واستنتج تغيرات f.
3. Dresser le tableau des variations de f .	3) ارسم جدول تغيرات f .
4. Trouver une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse $x_0=1$.	4) أوجد معادلة المماس T للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.
5.a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle que l'on déterminera.	a.5) بين أن الدالة f تقابل من $]0;+\infty[$ نحو مجال يطلب تحديده.
b) Calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{-1+\ln 4}{2}\right)$; on pourra utiliser la question 4.	b) احسب $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{-1+\ln 4}{2}\right)$ ؛ لذلك يمكن استخدام السؤال 4.
c) Construire (C).	c) أنشئ المنحنى (C).